

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий



/ Кургалин С.Д.

28.02.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.02 ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

1. Код и наименование направления подготовки:

02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки:

квантовая теория информации

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: цифровых технологий

6. Составители программы:

Борзунов Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: НМС ФКН (протокол № 3 от 25.02.2022)

8. Учебный год: 2024-2025 Семестры: 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целью дисциплины является формирование знаний, умений и компетенций в области теории информации, теории кодирования сигналов как носителей информации, возможностях передачи и преобразования информации.

Основными задачами является изучение энтропии источников информации, исследование различных видов кодов, рассмотрение математических моделей каналов передачи информации.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к вариативной части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение математического анализа, теории вероятностей, математической статистики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: основные положения и понятия теории информации, алгоритмы кодирования для источников информации и каналов связи, области применения теории информации
ПК-1	Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.2	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	Уметь: оценивать скорость передачи информации и пропускную способность каналов, реализовывать методы кодирования и декодирования на ЭВМ, вычислять энтропию источников
ПК-1	Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	Владеть: навыком применения методов теории информации для решения задач профессиональной деятельности, навыками разработки прикладных программ с применением положений теории информации, навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов передачи информации

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации 6 семестр – экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			6 сем.
Аудиторные занятия		48	48
в том числе:	лекции	32	32
	практические		
	лабораторные	16	16
Самостоятельная работа		24	24
в том числе: курсовая работа (проект)			
Экзамен		36	36
Итого:		108	108

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Системы связи и теория информации	Основная проблема связи. История коммуникаций. Необходимость теории информации	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
1.2	Мера информации	Энтропия Шеннона. Совместная энтропия, условная энтропия. Относительная энтропия и взаимная информация. Цепные правила для энтропии. Свойства энтропии.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
1.3	Свойство асимптотического равномерного распределения	Сильная и слабая типичность. Сходимость. Теорема свойства асимптотического равномерного распределения. Высоковоероятностные множества и типичные множества. Сжатие данных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
1.4	Кодирование для дискретных источников	Примеры кодов. Неравенство Крафта. Оптимальные коды. Неравенство Крафта для однозначно декодируемых кодов. Коды Хаффмана. Кодирование Шеннона-Фано-Элиаса. Энтропия случайных процессов. Марковские источники	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
1.5	Дискретные каналы без памяти и пропускная способность	Определение и примеры пропускной способности канала. Свойства. Объединенные типичные последовательности. Теорема кодирования для канала с шумами. Обратная теорема. Методы кодирования и декодирования. Коды Хэмминга. Каналы с обратной связью.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
1.6	Дифференциальная энтропия	Определение. Соотношение с дискретной энтропией. Относительная энтропия и взаимная информация. Свойство асимптотического равномерного распределения для непрерывных случайных величин.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
2. Лабораторные занятия			
2.1	Свойство асимптотического	Сильная и слабая типичность. Сходимость. Теорема свойства	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432

	равнораспределения	асимптотического равнораспределения. Высоко-вероятностные множества и типичные множества. Сжатие данных.	
2.2	Кодирование для дискретных источников	Примеры кодов. Неравенство Крафта. Оптимальные коды. Неравенство Крафта для однозначно декодируемых кодов. Коды Хаффмана. Кодирование Шеннона-Фано-Элиаса. Энтропия случайных процессов. Марковские источники	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
2.3	Дискретные каналы без памяти и пропускная способность	Определение и примеры пропускной способности канала. Свойства. Объединенные типичные последовательности. Теорема кодирования для канала с шумами. Обратная теорема. Методы кодирования и декодирования. Коды Хэмминга. Каналы с обратной связью.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432
2.4	Дифференциальная энтропия	Определение. Соотношение с дискретной энтропией. Относительная энтропия и взаимная информация. Свойство асимптотического равнораспределения для непрерывных случайных величин.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3432

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Системы связи и теория информации.	4		0	4	8
2	Мера информации.	4		0	4	8
3	Свойство асимптотического равнораспределения.	4		2	4	10
4	Кодирование для дискретных источников.	6		4	4	14
5	Дискретные каналы без памяти и пропускная способность.	8		6	4	18
6	Дифференциальная энтропия.	8		4	4	16
	Итого:	32	0	16	24	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических (или лабораторных) заданий в объеме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного

материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины. Лекционные занятия формируют базу для практических (или лабораторных) занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических (лабораторных) занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, презентационным материалом (при наличии) и конспектов практических (лабораторных) занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Больше количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Ляшева, С. А. Теория информации и кодирования : учебно-методическое пособие / С. А. Ляшева. — Казань : КНИТУ-КАИ, 2020. — 120 с. — ISBN 978-5-7579-2493-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/193503

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Попов, И. Ю. Теория информации / И. Ю. Попов, И. В. Блинова. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 978-5-507-44279-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/218870
2	Чечёта, С. И. Введение в дискретную теорию информации и кодирования : учебное пособие / С. И. Чечёта. — Москва : МЦНМО, 2021. — 223 с. — ISBN 978-5-4439-2182-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/267497

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": http://biblioclub.ru/
3	Электронно-библиотечная система "Лань": https://e.lanbook.com/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Попов, И. Ю. Теория информации / И. Ю. Попов, И. В. Блинова. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 978-5-507-44279-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/218870

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Компьютерный класс: специализированная мебель, персональные компьютеры, мультимедийный проектор, экран.

ПО: ОС Windows v.7, 8, 10, интерпретатор языка Python, IDE PyCharm, редактор Jupiter.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-6	ПК-1	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3	Лабораторные работы
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Вопросы для экзамена

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью лабораторных работ.

Перечень лабораторных работ

1. Энтропия и взаимная информация.
2. Кодирование для дискретных источников.
3. Пропускная способность каналов. Кодирование для дискретных каналов.

Типовые задания для лабораторных работ

Лабораторная работа № 1

«Энтропия и взаимная информация»

Цель работы: практическая реализация методов нахождения энтропии, взаимной и собственной информации для дискретных источников и каналов передачи информации.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы, реализующей нахождение энтропии, взаимной и собственной информации, условной энтропии и других информационных характеристик для произвольного XY-ансамбля и проверку её работы на контрольном примере.

Отчёт о работе заключается в демонстрации работы программы и объяснении принципов работы алгоритма.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: написать программу, реализующую нахождение энтропии, взаимной и собственной информации, условной энтропии и других информационных характеристик для произвольного XY-ансамбля. Проверить работу программы на контрольном примере. Оформить отчет по лабораторной работе.

Лабораторная работа № 2

«Кодирование для дискретных источников»

Цель работы: практическая реализация методов кодирования Хаффмана и Шеннона-Фано-Элиаса для дискретных источников; анализ методов кодирования.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы, реализующей методы кодирования Хаффмана и Шеннона-Фано-Элиаса для дискретных источников и проверку её работы на контрольном примере.

Отчёт о работе заключается в демонстрации работы программы и объяснении принципов работы алгоритма.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: написать программу, реализующую методы кодирования Хаффмана и Шеннона-Фано-Элиаса для дискретных источников. Проверить работу программы на контрольном примере. Оформить отчет по лабораторной работе.

Лабораторная работа № 3

«Пропускная способность каналов. Кодирование для дискретных каналов»

Цель работы: практическая реализация методов кодирования Хэмминга. Исследование и нахождение пропускной способности канала.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы, реализующей метод кодирования Хэмминга для дискретного канала, и также вычисляющей пропускную способность канала; проверку её работы на контрольном примере.

Отчёт о работе заключается в демонстрации работы программы и объяснении принципов работы алгоритма.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: написать программу, реализующую метод кодирования Хэмминга для дискретного канала. Проверить работу программы на контрольном примере. Найти пропускную способность канала. Оформить отчет по лабораторной работе.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень вопросов к экзамену.

Перечень вопросов к экзамену

1. Основная проблема связи. Общая блок-схема система связи.
2. Кодирование Шеннона-Фано-Элиаса.
3. Модели источников и кодирование источников.
4. Арифметическое кодирование.
5. Энтропия. Свойства энтропии. Совместная энтропия. Условная энтропия.
6. Пропускная способность дискретного канала.
7. Взаимная информация. Средняя взаимная информация. Собственная информация.
8. Симметричные, слабо симметричные каналы.
9. Связь энтропии и информации.
10. Свойства пропускной способности канала.
11. Свойство асимптотического равномерного распределения.
12. Определение кода дискретного канала. Вероятность ошибки. Скорость кода. Ёмкость канала.
13. Коэффициент энтропии случайных процессов.
14. Совместная типичность. Свойства совместно типичных последовательностей.
15. Типичные множества.
16. Теорема канального кодирования.
17. Энтропия марковских цепей.

18. Практические схемы кодирования. Код повторений.
19. Энтропия случайных блужданий на взвешенном графе.
20. Линейные блочные коды.
21. Неравенство Крафта.
22. Коды Хэмминга.
23. Сжатие данных. Примеры кодов.
24. Пропускная способность канала с обратной связью.
25. Оптимальные коды источников.
26. Дифференциальная энтропия.
27. Границы оптимальных кодовых длин.
28. Коды Хаффмана.

Требования к студентам при проведении промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала.	–	Неудовлетворительно

Приведённые ниже задания рекомендуется использовать при проведении диагностических работ для оценки остаточных знаний по дисциплине

Задания с выбором ответа

1. От частоты дискретизации непрерывной величины зависит:
 - (1) время, в течение которого затухают колебания исследуемой величины

- (2) добротность колебательной системы
(3) период между измерениями значений непрерывной величины

2. Устройства для преобразования непрерывной информации в дискретную называются:

- (1) цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)
(2) аналого-цифровой преобразователь (АЦП)
(3) кварцевый резонатор
(4) программатор

3. Какое обозначение для расстояния Кульбака-Лейблера двух вероятностных распределений P и Q , определенных на общем пространстве элементарных событий, принято в теории информации?

- (1) $D(P \parallel Q)$**
(2) $I(P; Q)$
(3) $H(P, Q)$
(4) $\langle P | Q \rangle$

4. Префиксным называется кодирование, при котором:

- (1) код со словом переменной длины, обладающий свойством: если в код входит слово c_1 , то для любой непустой строки c_2 слова c_1c_2 в коде не существует**
(2) каждый код является префиксом другого кода
(3) каждому коду соответствует определенный префикс из таблицы значений
(4) код со словом переменной длины, обладающий свойством: если в код входит слово c_1 , то для любой непустой строки c_2 в коде найдется слово c_1c_2

5. Дискретная случайная величина X задана распределением $P(X=2^n) = 2^{-n}$, $n=1, 2, \dots$.
Найдите энтропию случайной величины X .

- (1) $H(X) = 1$ бит
(2) $H(X) = 2.5$ бит
(3) $H(X) = 2$ бит
(4) $H(X) = 2^n$ бит

6. Цель сжатия данных состоит в:

- (1) изменении (как в увеличении, так и в уменьшении) количества бит, необходимых для хранения или передачи информации, а также коррекции ошибок
(2) увеличении количества байт, необходимых для хранения или передачи заданной информации
(3) уменьшении количества бит, необходимых для хранения или передачи заданной информации

7. Перечислите синонимы термина «сжатие данных»

- (1) компрессия данных**
(2) сжимающее кодирование
(3) дискретизация
(4) архивация данных

8. Согласно методу Хаффмана код строится:

- (1) на основе операций над конечным полем по простому модулю
(2) при помощи двоичного дерева
(3) посредством операторной структуры

9. Дискретная случайная величина X может принимать ровно три различных значения. При построении блочного кода с длиной блока, равной 5, для X необходимо ввести дискретную случайную величину X – выборку пяти значений X . Тогда X имеет:

- (1) **243 различных значения**
- (2) 125 различных значений
- (3) 15 различных значений

10. Сжатие с потерями, как правило, не используется для данных, представленных в виде:

- (1) полноцветная графика
- (2) видеоинформация
- (3) звук
- (4) **текстовая информация**

11. Расстоянием Хэмминга между двоичными словами одинаковой длины n называется:

- (1) количество четных позиций, в которых эти слова не встречаются
- (2) **число позиций, в которых соответствующие символы двух слов одинаковой длины различны**
- (3) количество позиций, в которых эти слова совпадают

12. Весом двоичного слова в теории информации называют:

- (1) **количество единиц в нем**
- (2) количество нулей в нем
- (3) общее количество цифр в нем
- (4) двоичный логарифм количества цифр в нем

13. Известно, что энтропия дискретного стационарного источника без памяти максимальна, если вероятности генерируемых им сообщений распределены по закону:

- (1) **равномерному**
- (2) нормальному
- (3) гиперэкспоненциальному
- (4) логнормальному

14. Какие единицы измерения количества информации и энтропии применяются в теории информации:

- (1) **бит**
- (2) **нат**
- (3) **дит**
- (4) **трит**
- (5) бел

15. Какими свойствами обладает собственная информация сообщения, состоящего из элементов некоторого конечного множества:

- (1) **неотрицательность**
- (2) **монотонность**
- (3) **аддитивность**
- (4) мультипликативность

16. Какими свойствами обладает средняя взаимная информация $I(X; Y)$:

- (1) **неотрицательность**
- (2) монотонность
- (3) антисимметричность

(4) $I(X; Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$, где $H(X)$ и $H(Y)$ — энтропия первого и второго источников соответственно

17. В каких единицах измеряется скорость кода при кодировании дискретного канала с шумом?

- (1) бит на символ канала
- (2) бел
- (3) децибел
- (4) непер

Задания с кратким ответом

1. Укажите наименьшее количество вопросов, позволяющих с гарантией определить день рождения некоторого человека (а именно, число и месяц), при условиях ответов вида «да» и «нет».

Ответ: 9

2. Является ли код $C = \{0, 1, 10, 01\}$ однозначно декодируемым?

Ответ: нет

3. Является ли код $C = \{1, 10, 100, 000\}$ однозначно декодируемым?

Ответ: да

4. Вычислите, сколько четырехбуквенных сообщений, отличающихся хотя бы в одной букве, можно составить из 15-буквенного алфавита при условии любого чередования букв.

Ответ: 50625

5. Определите, какое количество информации в среднем получает человек, определяющий день рождения своего собеседника, когда последний сообщает ему месяц, в котором он родился? Ответ запишите в битах и округлите до десятых.

Ответ: 3,6

Задания с развернутым ответом

1. Рассмотрим ансамбль буквенных сообщений $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ с вероятностями букв $\{0,35, 0,2, 0,15, 0,1, 0,1, 0,1\}$ соответственно. Чему равна энтропия источника и средняя длина кодовых слов, построенных согласно методу Хаффмана?

Решение:

Энтропия источника по Шеннону $H = 2,4016$.

Средняя длина кодовых слов равна $l = 2(0,35 + 0,2) + 3(0,15 + 3 \cdot 0,1) = 2,45$.

2. Для передачи по двоичному симметричному каналу с переходной вероятностью ε множество из восьми равновероятных сообщений кодируется в следующее множество из восьми кодовых слов:

$x_1 = 0000$,

$x_2 = 0011$,

$x_3 = 0101$,

$x_4 = 0110$,

$x_5 = 1001$,

$x_6 = 1010$,

$x_7 = 1100$,

$x_8 = 1111$.

Пусть на выходе канала принимается последовательность $y = 0000$. Определите количество информации о x_1 , содержащейся в первом принятом символе.

Решение:

$$I_{x_1; y_1}(x_1; 0) = \log_2 [p(\text{1-й принятый символ} = 0 \mid \text{передавался } x_1) / p(\text{1-й принятый символ} = 0)] \\ = \log_2 [(1-\varepsilon)/(1/2)] = \log_2 [2(1-\varepsilon)].$$

3. Рассмотрим дискретный источник без памяти, имеющий алфавит из 6 букв с вероятностями $\{0,3, 0,2, 0,15, 0,15, 0,1, 0,1\}$. Постройте двоичный код Хаффмана для такого источника. Чему равно среднее число кодовых букв на букву источника для этого кода?

Решение:

$\{00, 10, 010, 011, 110, 111\}$. Средняя длина 2,5.

4. Рассмотрим дискретный источник без памяти, имеющий алфавит из 7 букв с вероятностями $\{0,3, 0,25, 0,15, 0,1, 0,1, 0,05, 0,05\}$. Постройте двоичный код Хаффмана для такого источника. Чему равно среднее число кодовых букв на букву источника для этого кода?

Решение:

$\{00, 10, 010, 110, 111, 0110, 0111\}$. Средняя длина 2,55.

5. Пусть случайная величина X представляет собой пять возможных символов $\{a, b, c, d, e\}$, и вероятности распределения $p(x)$ и $q(x)$ по этим символам равны:

$$p(x) = \{1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16\};$$

$$q(x) = \{1/2, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8\}.$$

Вычислите энтропию $H(p)$, $H(q)$ и расстояние Кульбака – Лейблера.

Решение:

$$H(p) = -\sum p_i \log p_i = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + 4/16 = 15/8 \text{ бит};$$

$$H(q) = -\sum q_i \log q_i = 1/2 + 4 \cdot 3/8 = 2 \text{ бита};$$

$$D(p||q) = \sum p_i \log_2(p_i/q_i) = 1/2 \cdot \log_2(1) + 1/4 \cdot \log_2(2) + 1/8 \cdot \log_2(1) + 2 \cdot 1/16 \cdot \log_2(1/2) = 0 + 1/4 + 0 - 1/8 = 1/8 \text{ бита};$$

$$D(q||p) = \sum q_i \log_2(q_i/p_i) = 1/2 \cdot \log_2(1) + 1/8 \cdot \log_2(1/2) + 1/8 \cdot \log_2(1) + 2 \cdot 1/8 \cdot \log_2(2) = 0 - 1/8 + 0 + 1/4 = 1/8 \text{ бита}.$$

6. Значения дискретных случайных величин X_1 и X_2 определяются подбрасыванием двух идеальных монет, а дискретная случайная величина U равна количеству выпавших при подбрасывании этих монет "решек". Сколько битов информации об X_1 содержится в U ?

Решение: $I(U, X_1) = 0,5$ бит информации об X_1

1 способ:

Случайная величина $U = \{0, 1, 2\}$, вероятности $\{1/4, 1/2, 1/4\}$,

случайная величина $U \times X_1 = \{(0,0), (1,0), \dots\}$, вероятности $\{1/4, 1/4, 0, 0, 1/4, 1/4\}$;

$$I(U, X_1) = H(U) + H(X_1) - H(U, X_1) = 3/2 + 1 - 2 = 0,5 \text{ бита}$$

2 способ:

$$I(U, X_1) = \sum p(u, x_1) \cdot \log(p(u, x_1) / (p(u)p(x_1))) =$$

$$1/4 \cdot \log(1/4 / (1/4 \cdot 1/2)) + 1/4 \cdot \log(1/4 / (1/2 \cdot 1/2)) + 0 +$$

$$0 + 1/4 \cdot \log(1/4 / (1/2 \cdot 1/2)) + 1/4 \cdot \log(1/4 / (1/4 \cdot 1/2)) = 0,5 \text{ бит}.$$